



궁금하신 점은 무엇이든 물어보는 상담센터

학생과 학부모, 학생들끼리의 다양한 고민과 리콜 상담해드립니다.

2019 업그레이드 생방송

김대호기술사 1:1 개인교육

[홈](#) > [커뮤니티](#) > [학습자료](#) > 상세보기

커뮤니티

[우리들의 이야기](#) / [정보공유](#) / [무료학습자료](#)[홈](#) > [커뮤니티](#) > [학습자료](#) > 상세보기

합격수기

무료학습

학습자료

기출문제 자료실

문제복원 자료실

문제복원 QNA

자유게시판



- 글자작게

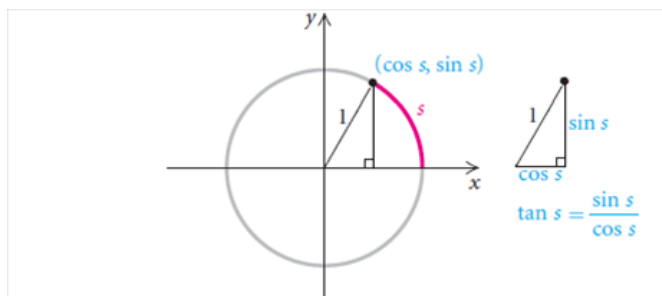
+ 글자크게

삼각함수 | 학습자료

2018-12-20 13:08:00

작성者 김대호

조회 6 | 추천 0



단위 원에서 (반지름이 1인 원) 직각 삼각형에 대하여 삼각함수를 정의한다.
삼각함수는 다음과 같이 정의 된다. 이 직각삼각형은 피타고라스의 정리를 적용할 수 있다.
단위 원에서 빗변이 1 이므로 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이 됨을 쉽게 알 수 있다.

사인: $\sin A = \frac{a}{c}$

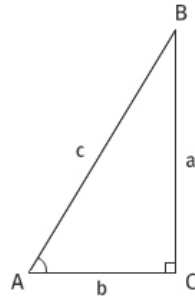
코사인: $\cos A = \frac{b}{c}$

탄젠트: $\tan A = \frac{a}{b}$

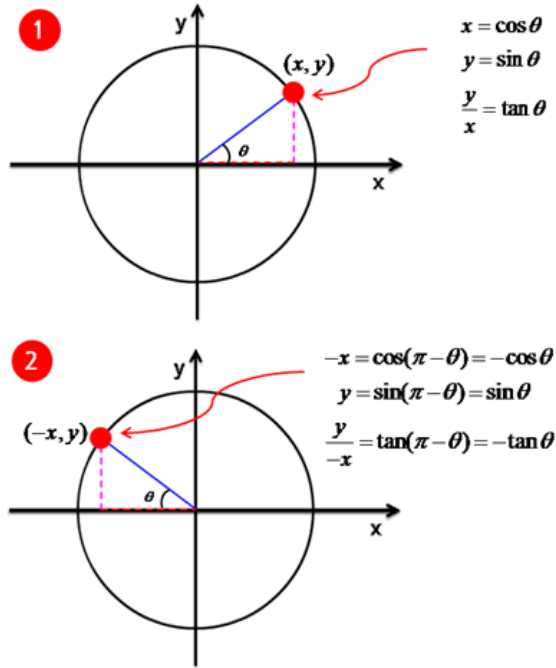
코시컨트: $\csc A = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin A}$

시컨트: $\sec A = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos A}$

코탄젠트: $\cot A = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan A}$



아래 그림에서 높이를 y 밑변을 x 라 하면 $\sin \theta$ 와 $\cos \theta$ 의 관계를 알수 있다.



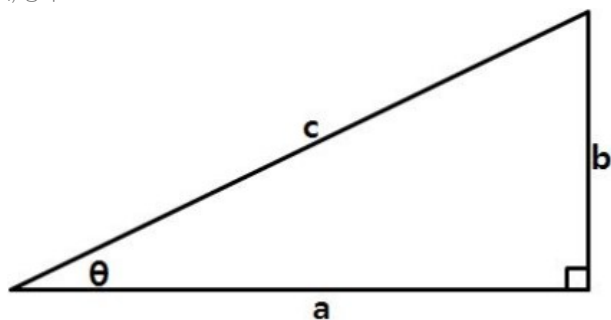
다음 표는 각도가 특수한 30도 45도 60도 일 경우의 삼각함수의 각의 크기를 나타낸다.

각도	30°	45°	60°
구분	한 변이 2인 정삼각형	한 변이 1인 정사각형	한 변이 2인 정삼각형
sin	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
tan	$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\tan 45^\circ = 1$	$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

* 이곳의 그림은 모두 서버에 업로드 되었습니다.

각함수 관련 공식은 매우 많습니다. 이를 차례로 정리해보겠습니다.

i) 정의



위와같은 삼각형에서 삼각비의 정의는 다음과 같습니다.

$\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \operatorname{cosec}\theta(\csc\theta), \sec\theta, \cot\theta$

$$\sin\theta = \frac{b}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{c}{b}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{c}{a}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{a}{b}$$

ii) 제곱공식

삼각함수의 제곱공식이라는 게 있습니다.

제곱에 관한 항이 들어가서 그렇게 이름붙여졌습니다. 공식은 다음과 같습니다.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

iii) $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ 의 관계

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

iv) 삼각함수의 변형 (각이 $n\pi/2 \pm \theta$ 의 꼴로 주어졌을때)

θ 가 예각일 때, 다음 식들이 성립합니다.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = +\cos\theta \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = +\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = +\sin\theta \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = +\cot\theta \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta$$

$$\sin(\pi - \theta) = +\sin\theta \quad \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \quad \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$$

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta \quad \tan(\pi + \theta) = +\tan\theta$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = +\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = +\cot\theta \quad \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta$$

$$\sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta \quad \sin(2\pi + \theta) = +\sin\theta$$

$$\cos(2\pi - \theta) = +\cos\theta \quad \cos(2\pi + \theta) = +\cos\theta$$

$$\tan(2\pi - \theta) = -\tan\theta \quad \tan(2\pi + \theta) = +\tan\theta$$

v) 삼각함수의 합성

$y = a\sin x + b\cos x$ 꼴로 된 삼각함수를 하나의 삼각함수로 합성할 수 있습니다.

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \theta)$$

$$(* \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \tan \theta = \frac{b}{a})$$

vi) 삼각함수의 덧셈공식

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

vii) 삼각함수의 2배각 공식

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

viii) 삼각함수의 3배각 공식

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha}{4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha}$$

ix) 삼각함수의 반각공식

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

x) 삼각함수의 곱의 형식을 합의 꼴로 표현하기

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} \{ \sin(A+B) + \sin(A-B) \}$$

$$\cos A \sin B = \frac{1}{2} \{ \sin(A+B) - \sin(A-B) \}$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} \{ \cos(A+B) + \cos(A-B) \}$$

$$\sin A \sin B = -\frac{1}{2} \{ \cos(A+B) - \cos(A-B) \}$$

xi) 삼각함수의 합의 형식을 곱의 꼴로 표현하기

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

3. 공식 유도

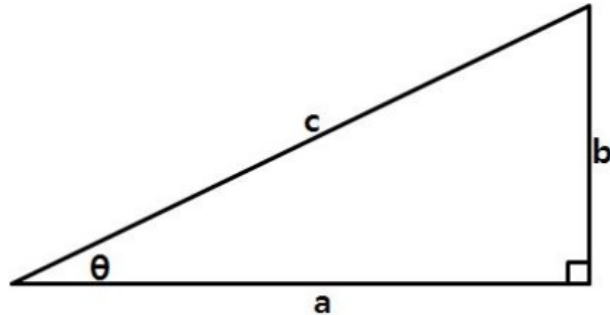
공식 i)은 삼각형의 정의이기 때문에 증명이 불가능한 영역입니다.

공식 i)에서 주의할 점은,

$\operatorname{cosec}\theta$ ($\csc\theta$, 코시컨트라 읽음)는 $\sin\theta$ 의 역수($\cos\theta$ 의 역수가아닙니다!)이고
 $\sec\theta$ (시컨트라 읽음)는 $\cos\theta$ 의 역수($\sin\theta$ 의 역수가아닙니다!) 라는 점입니다.

ii) 제곱공식 유도

제곱공식은 피타고라스의 정리로부터 간단히 유도됩니다.



위 그림에서 피타고라스의 정리인 다음 식이 성립합니다.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

양변을 c^2 으로 나누면 다음과 같이 되고,

$$\frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

i)에서 정의한 삼각비의 정의 중에서 $\sin\theta$ 와 $\cos\theta$ 의 정의를 이용하면,

$$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

나머지 제곱공식은 이 공식의 양변을 $\cos^2\theta$ 로 나누거나 $\sin^2\theta$ 로 나누면 됩니다.

먼저 양 변을 $\cos^2\theta$ 으로 나눈 경우,

$$\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \sec^2\theta$$

그런데

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

이므로 위 식은 다음과 같이 정리됩니다.

$$\therefore 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

(일반적으로 $\tan\theta$ 와 $\sec\theta$ 는 친합니다. 식에 종종 함께 등장합니다.)

$\sin^2\theta$ 으로 나눈 경우,

$$\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$1 + \frac{\cos^2}{\sin^2\theta} = \csc^2\theta$$

그런데

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

이므로 위 식은 다음과 같이 정리됩니다.

$$\therefore 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

(일반적으로 $\cot\theta$ 와 $\csc\theta$ 는 친합니다. 식에 종종 함께 등장합니다.)

iii) $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ 의 관계 유도

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

위 식은 삼각비의 정의로부터 간단히 유도됩니다. 각 삼각비는 다음과같이 정의됩니다.

$$\sin\theta = \frac{b}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

$\sin\theta$ 를 $\cos\theta$ 로 나누면 자연스럽게 $\tan\theta$ 의 정의가 나옵니다.

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{b}{a}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

ii)의 제곱공식과 iii)의 식의 의미는 삼각비 하나가 주어지면 나머지 삼각비를 모두 구할 수 있다는 것입니다.

예를들어 어떤 삼각형의 $\cos$ 값이 주어졌다고 칩시다.

그러면 식 ii)로부터 $\sin$ 을 구할 수 있고, 이어서 식 iii)으로부터 $\tan$ 을 구할 수 있습니다.

이게 가능한 이유는, 직각삼각형에서 한 예각이 주어지면 그 각의 삼각비는 무조건 하나의 값을 가지는 대응관계, 즉 함수 관계에 있기 때문입니다.

즉 특정 삼각비의 값을 가지는 직각삼각형의 모양은 오직 하나이며,

그에 해당하는 나머지 삼각비 역시 오직 하나의 값을 가집니다.

iv) 삼각함수의 변형공식 유도

표에 나타난 변형공식들, 즉 각이 $n\pi/2 \pm \theta$ 의 꼴로 주어졌을 때 나타나는 공식들은

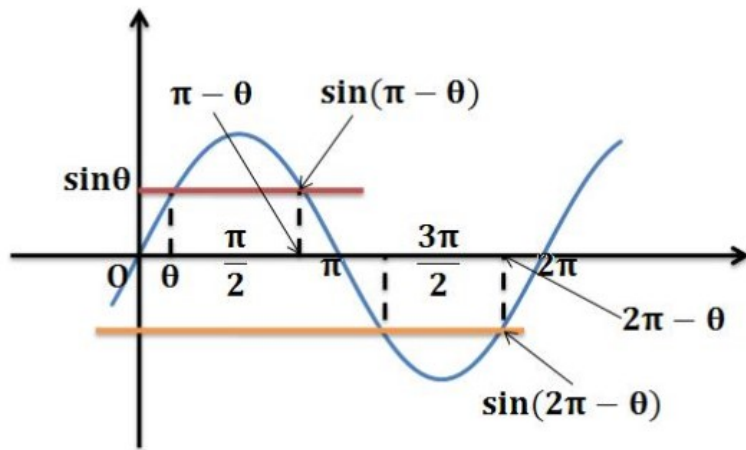
삼각함수의 주기적 성질을 이용해 유도할 수 있습니다.

여기서는 주기함수인 삼각함수의 성질을 간단하게 짚고, 이로부터 공식 몇 개만 유도해 보겠습니다.

(나머지는 여러분의 몫으로 남기겠습니다.)

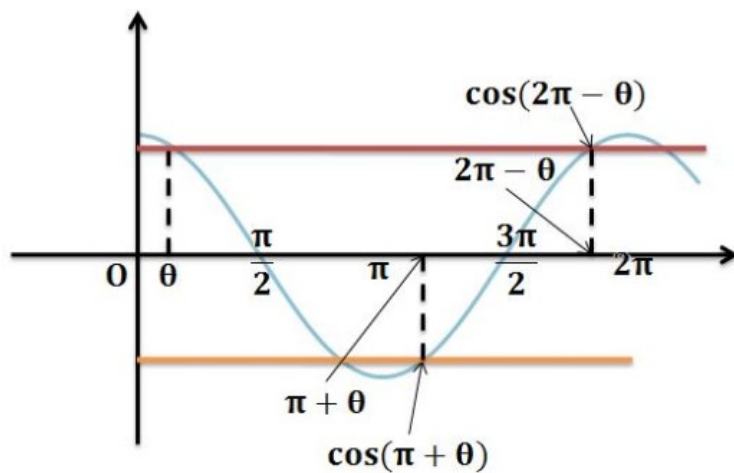
먼저 사인함수를 봅시다.

사인함수는 그래프가 2π 인 주기함수입니다.



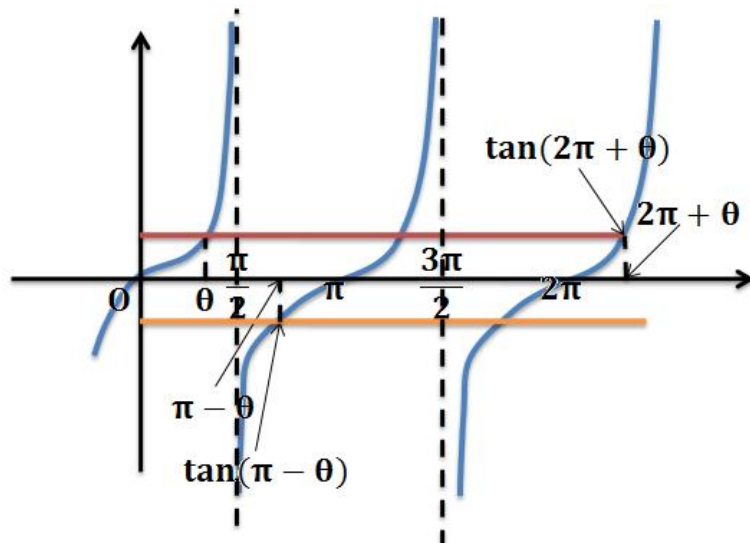
위 그림에서 임의의 예각 θ 를 잡고 $\sin \theta$ 의 위치를 봅시다.(붉은 실선)
 사인함수의 대칭성 및 주기 특성상
 각이 $\pi - \theta$ 일 때의 함수값 $\sin(\pi - \theta)$ 와 $\sin \theta$ 값이 같습니다.
 한편, $2\pi - \theta$ 일때의 함수값 $\sin(2\pi - \theta)$ 는 $-\sin \theta$ 임을 알 수 있습니다.(주황색 실선)

다음으로 코사인함수를 봅시다.



마찬가지로 논리로
 $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$, $\cos(2\pi - \theta) = +\cos \theta$ 임을 알 수 있습니다.

끝으로, 탄젠트 함수를 봅시다.
 탄젠트 함수는 주기가 π 인 함수입니다.

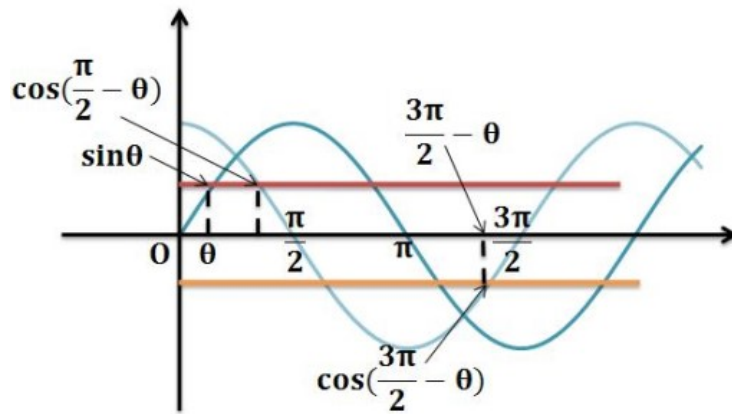


그림을 보면
 $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$, $\tan(2\pi + \theta) = +\tan \theta$ 임을 알 수 있습니다.

나머지 각에 대해서도 같은 방법을 사용해서 구하면,
 공식 iv)에서 제시한 모든 공식을 유도할 수 있습니다.

다음으로 각이 $\pi/2 \pm \theta$, $3\pi/2 \pm \theta$ 으로 주어진 경우에는 조금 다른데요.

이는 사인함수를 x축으로 $\pi/2$ 만큼 평행이동시키면 코사인함수가 나온다는 사실로부터 유도할 수 있습니다.



위 그림은 사인함수 그래프와 코사인함수 그래프를 한 좌표평면에 나타낸 그림입니다.

그림에서 $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin \theta$, $\cos(3\pi/2 - \theta) = -\sin \theta$ 가 됨을 알 수 있습니다.

$\tan(\pi/2 \pm \theta)$, $\tan(3\pi/2 \pm \theta)$ 의 경우에는 공식 iii) $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$ 로 변형한 뒤 유도하면 $\cot \theta$ 에 관한 함수로 표현할 수 있습니다.
 $\tan(\pi/2 - \theta)$ 에 대해서만 해보겠습니다.

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} \\ &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \cot \theta \end{aligned}$$

나머지 식들은 같은 방법으로 유도하면 됩니다.

v) 삼각함수의 합성 유도

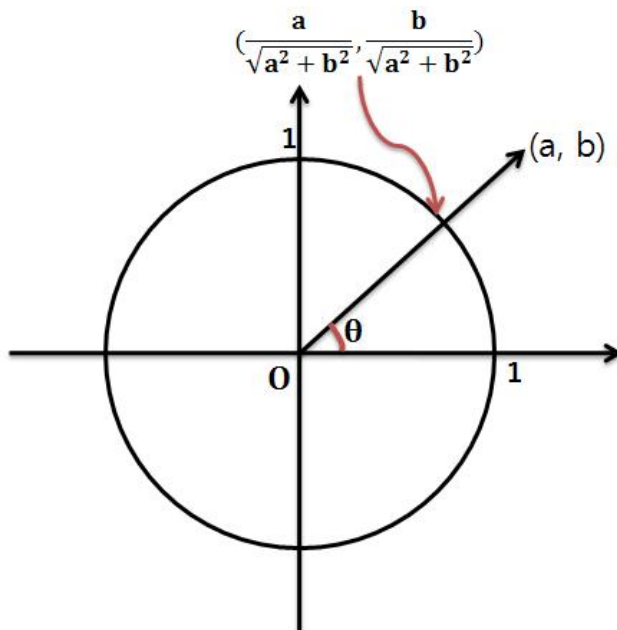
삼각함수의 합성은 단위원과 삼각비의 관계로부터 유도됩니다.

중심이 (0, 0), 반지름이 1인 단위원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 생각해봅시다.

그 단위원과, 합성할 삼각함수 $y = a \sin x + b \cos x$ 에 나타난 두 상수 a, b를 좌표평면에 찍고 위치벡터 (a, b)와 원이 만나는 교점의 좌표를 구하면 다음과 같습니다.

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

(이 점을 원에 넣어보면 식이 성립합니다. 또한 원점과 이 점의 기울기는 a/b가 되는데, 이는 원점과 점 (a, b) 사이의 기울기와 일치합니다. 따라서 이 점은 위치벡터 위의 점입니다. 이처럼, 어떤 위치벡터와 단위원의 교점을 그 벡터의 방향벡터 라고 명명합니다.)



위 그림에서 x축과 벡터 (a, b)가 이루는 양의 각을 θ 라 하면,
 단위원 위의 교점은 $(\cos \theta, \sin \theta)$ 가 됩니다. 즉, 다음 식이 성립합니다.

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

따라서, 다음과같이 삼각함수를 합성할 수 있습니다.

$$y = a\sin x + b\cos x$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} \times \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x \right)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} (\cos\theta \sin x + \sin\theta \cos x)$$

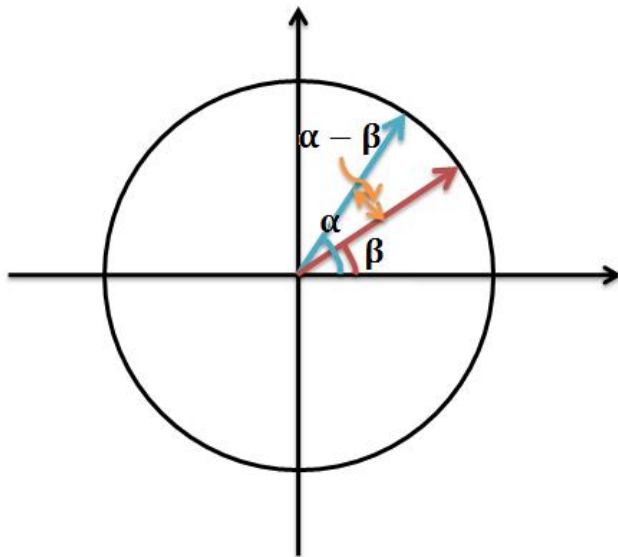
$$= \sqrt{a^2+b^2} \sin(x+\theta)$$

원래 식에서 보이지 않던 θ , 합성과정에서 새로 생겨난 θ 는 좌표평면 위의 점 (a, b) 와 x 축이 양의 방향으로 이루는 각도입니다.

vi) 삼각함수의 덧셈공식 유도

삼각함수의 덧셈공식은 두 벡터의 내적으로 증명할 수 있습니다.

아래와 같은 단위원에서 두 벡터 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $(\cos\beta, \sin\beta)$ 를 생각할 수 있습니다.



두 벡터를 각각 a, b 라 두면 이 둘의 내적은 다음과 같이 됩니다.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\alpha - \beta)$$

$$(\cos\alpha, \sin\alpha) \cdot (\cos\beta, \sin\beta) = 1 \times 1 \times \cos(\alpha - \beta)$$

$$\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

이로써 삼각함수 합공식의 네번째 공식을 유도했습니다.

이제부터 이 식을 기준으로 나머지 다른 공식을 유도하겠습니다.

위 식에서 β 대신 $-\beta$ 를 대입하면 세 번째 공식을 얻을 수 있습니다.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

β 에 $-\beta$ 를 대입하면,

$$\cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha \cos(-\beta) + \sin\alpha \sin(-\beta)$$

그런데 $\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ 이므로,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

또한 위 식에서 α 대신 $\pi/2 - \alpha$ 를 대입하면 아래와 같이 식이 전개됩니다.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

α 에 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 를 대입하면,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

합공식 첫번째 공식을 유도했습니다.

이 공식에 β 대신 $-\beta$ 를 대입하면 두 번째 공식을 얻을 수 있습니다.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

β 에 $-\beta$ 를 대입하면,

$$\sin(\alpha - (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \sin(-\beta)\cos\alpha$$

그런데 $\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ 이므로,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

탄젠트 관련 합공식은 위에서 유도한 식의 사인값을 코사인값으로 나누면 됩니다.

그 과정은 아래와 같습니다.

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}\end{aligned}$$

분모, 분자를 $\cos\alpha\cos\beta$ 로 나누면

$$\begin{aligned}&= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} \\ &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

이 식에 β 대신 $-\beta$ 를 대입하면 마지막 합공식을 얻을 수 있습니다.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

β 에 $-\beta$ 를 대입하면,

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha\tan(-\beta)}$$

그런데 $\tan(-\beta) = -\tan\beta$ 이므로,

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

*sinx는 기함수(원점대칭)이기 때문에 $\sin(-x) = -\sin x$ 가 되고,

cosx는 우함수(y축대칭)이기 때문에 $\cos(-x) = +\cos x$ 가 되며,

tanx는 기함수(원점대칭)이기 때문에 $\tan(-x) = -\tan x$ 가 됨을 이용했습니다.

vii) 삼각함수의 2배각공식 유도

2배각공식은 삼각함수의 합공식 중 $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\tan(\alpha + \beta)$ 에 각각

$\beta = \alpha$ 를 대입하면 얻을 수 있는 식들입니다.

여기서는 코사인의 2배각공식만 유도해보겠습니다.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

β 에 α 를 대입

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 이므로, 이를 대입하면

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

나머지 식들은 직접 해보시기 바랍니다.

viii) 삼각함수의 3배각공식 유도

3배각공식은 $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\tan(\alpha+\beta)$ 에 각각

$\beta=2\alpha$ 를 대입하면 얻을 수 있는 식들입니다.

여기서는 사인의 3배각공식만 유도해보겠습니다.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

$\beta=2\alpha$ 를 대입

$$\sin 3\alpha=\sin\alpha\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\cos\alpha$$

$$=\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$=\sin\alpha-2\sin^3\alpha+2\sin\alpha\cos^2\alpha$$

$$=\sin\alpha-2\sin^3\alpha+2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)$$

$$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

나머지 식들은 직접 해보시기 바랍니다.

ix) 삼각함수의 반각공식 유도

반각공식은 코사인의 2배각공식에서 출발합니다.

먼저 코사인의 반각공식은 아래 식을 이용합니다.

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\alpha=\frac{\alpha}{2} \text{를 대입하면,}$$

$$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$$

$$\therefore \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

다음으로 사인의 반각공식은 다음 식을 이용합니다.

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

$$\alpha=\frac{\alpha}{2} \text{를 대입하면,}$$

$$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

탄젠트의 반각공식은 위 둘을 나누면 됩니다.

$$\begin{aligned}\tan^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \\ &= \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\end{aligned}$$

x) 삼각함수의 곱의 형식을 합의 꼴로 표현하기

이 공식의 유도는 특정 식으로부터 출발하는 게 아니라,

식의 우변을 그대로 전개해보면 좌변처럼 나오는 다소 직관적인 식입니다.

가장 위의 식의 우변을 전개해보겠습니다.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \{ \sin(A+B) + \sin(A-B) \} \\
&= \frac{1}{2} \{ \sin A \cos B + \sin B \cos A + \sin A \cos B - \sin B \cos A \} \\
&= \frac{1}{2} \{ 2 \sin A \cos B \} \\
&= \sin A \cos B \\
&\therefore \sin A \cos B = \frac{1}{2} \{ \sin(A+B) + \sin(A-B) \}
\end{aligned}$$

첫 번째 식을 유도했습니다.

$$\begin{aligned}
& \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \cos B \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2} - (A-B)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - (A+B)\right) \right\} \\
&\cos A \cos B = \frac{1}{2} \{ \cos(A-B) + \cos(A+B) \}
\end{aligned}$$

위 식에 A 대신 $\pi/2 - A$ 를 대입하면 아래 과정을 따라 세 번째 식을 얻습니다.

같은 논리로, B 대신 $\pi/2 - B$ 를 대입하면 네 번째 식을,

A 대신 $\pi/2 - A$ 를 대입, B 대신 $\pi/2 - B$ 를 대입하면 두 번째 식을 얻습니다.

(직접 해보시기 바랍니다.)

xi) 삼각함수의 합의 형식을 곱의 꼴로 표현하기

이제 마지막 공식인데요. 이 공식들은 공식 x)에서 구한 식에서 출발합니다.

먼저, 첫 번째 식에 A 대신 $(A+B)/2$ 를 대입하고 B 대신 $(A-B)/2$ 를 대입해봅시다.

$$\begin{aligned}
& \sin A \cos B = \frac{1}{2} \{ \sin(A+B) + \sin(A-B) \} \\
& \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \sin\left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\right) + \sin\left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\right) \right\} \\
& \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = \frac{1}{2} \{ \sin A + \sin B \} \\
&\therefore \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}
\end{aligned}$$

공식 xi)의 첫 번째 식을 얻었습니다.

이 식에서 B 대신에 $-B$ 를 대입해봅시다.

$\sin(-B) = -\sin B$ 이므로('sin은 원점대칭인 기함수') 대입하면 두 번째 식을 얻습니다.

$$\begin{aligned}
& \sin A + \sin(-B) = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} \\
&\therefore \sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}
\end{aligned}$$

세 번째 식은 공식 x)의 세 번째 식에서 A 대신 $(A+B)/2$, B 대신 $(A-B)/2$ 를 대입하면 얻어집니다.

$$\begin{aligned}
& \cos A \cos B = \frac{1}{2} \{ \cos(A+B) + \cos(A-B) \} \\
& \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \cos\left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\right) + \cos\left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\right) \right\} \\
& \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = \frac{1}{2} \{ \cos A + \cos B \} \\
&\therefore \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}
\end{aligned}$$

이 식에서 B 대신에 $\pi - B$ 를 대입하면 마지막 네 번째 식을 얻을 수 있습니다.

$$\cos A + \cos(\pi - B) = 2 \cos \frac{A + (\pi - B)}{2} \cos \frac{A - (\pi - B)}{2}$$
$$\cos A - \cos B = 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{A - B}{2} \right) \cos \left(- \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A + B}{2} \right) \right)$$
$$= 2 \cdot \left(-\sin \frac{A - B}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A + B}{2} \right)$$
$$= -2 \sin \frac{A - B}{2} \sin \left(\frac{A + B}{2} \right)$$
$$\therefore \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A + B}{2} \sin \frac{A - B}{2}$$

식을 유도하는 과정에서 cos함수가 우함수라는 점(cos(-B)=cosB)과 삼각함수의 변형공식 iv)에서 유도한 식들을 이용했습니다.(cos(π/2+θ)=-sinθ, cos(π/2-θ)=+sinθ)

댓글쓰기

번호	제목	등록인	등록일	추천수	조회수	비고
821	[기사실기] 삼각함수 N (0)	김대호	2018-12-20	0	6	
820	[기사실기] CTT의 연결 / 전류시험단자 연결 (0)	김대호	2018-11-23	0	69	
819	[기사실기] 견적 / 설계서의 단위 / 견적의 단위 (0)	김대호	2018-11-22	0	37	
818	[기사필기] 벡터공식 / 벡터방정식 / 벡터연산 (2)	김대호	2018-11-22	0	43	
817	[기사실기] 보호방식에 따른 전동기의 분류와 위험장소 (0)	김대호	2018-11-21	0	20	
816	[기사실기] 교호배치 / 동심배치 / 변압기 권선의 배치 (0)	김대호	2018-11-20	0	13	
815	[기사실기] 누설자속, 漏洩磁束, leakage flux / 누설임피던스 (0)	김대호	2018-11-19	0	30	
814	[기사실기] MSR (motor starting reactor: 모터 기동용 리액터) (0)	김대호	2018-11-18	0	30	
813	[기사실기] governor valve / 조속기 / 원심조속기 / 가버너밸브 (0)	김대호	2018-11-16	0	24	
812	[기사실기] 지선캡 / 지선재료 (1)	김대호	2018-11-14	0	30	
811	[기사실기] 축전기 비교표 / 연축전기 / 니켈카드뮴전기 / 니켈수소전기 / 알칼리축전기 (0)	김대호	2018-11-12	0	38	
810	[기사실기] 알칼리축전지의 5시간을 충전 (0)	김대호	2018-11-12	0	28	
809	[기사실기] 450/750V HFIX 저독성 난연 가교 폴리올레핀 절연 전선 / 전선의 굵기 / 전선규격 (0)	김대호	2018-11-09	0	56	
808	[기사실기] 간접노무비 / 비율분석방법 / 보완적방법 (0)	김대호	2018-11-04	0	67	
807	[기사실기] EL 램프 (0)	김대호	2018-11-04	0	39	
806	[기사실기] 배관 배선 기호 (천장은폐배선/노출배선/바닥은폐배선) (0)	김대호	2018-10-29	0	77	
805	[기사실기] 22.9 장주도 (0)	김대호	2018-10-29	0	77	
804	[기사실기] 리듀서 / 레듀사 (1)	김대호	2018-10-25	0	47	

803	[기사실기] 전기안전관리자 선임기준 (0)	김대호교수	2018-10-22	0	78	
802	[기사실기] 예비전원설비 / 내선규정 (1)	김대호교수	2018-10-19	0	74	

추천

□수정

✕삭제

✎답변

≡목록보기